

**Matematyka**  
**Lista 3**

**Zad 1.** Obliczyć granicę funkcji  $f(x)$  w punkcie  $x_0$ , gdzie

$$\begin{array}{ll} a) f(x) = \frac{x^2 - 3}{x^4 + x^2 + 1}, & x_0 = 3, \\ b) f(x) = \frac{x^2 - 1}{2x^2 + x - 1}, & x_0 = 1, \\ c) f(x) = \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}, & x_0 = 1, \\ d) f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 - 4x + 8}{x^4 - 8x^2 + 16}, & x_0 = 2, \\ e) f(x) = \frac{(x-1)\sqrt{2-x}}{x^2 - 1}, & x_0 = 1, \\ f) f(x) = \frac{\sqrt{x+13} - 2\sqrt{x+1}}{x^2 - 9}, & x_0 = 3, \\ g) f(x) = \frac{\sqrt{1+2x} - 3}{\sqrt{x} - 2}, & x_0 = 4, \\ h) f(x) = \left( \frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^2} \right), & x_0 = 1, \\ i) f(x) = \frac{\sin 5x}{3x}, & x_0 = 0, \\ j) f(x) = \frac{\sin 5x - \sin 3x}{\sin x}, & x_0 = 0. \end{array}$$

**Zad 2.** Obliczyć granice:

$$\begin{array}{ll} a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^3}{2x^2 - 1} - \frac{x^2}{2x - 1} \right), & b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3 + x} - x}, \\ c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{k}{x} \right)^{mx}, & d) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x+1}{x-2} \right)^{2x-1}, \\ e) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x+1}{2x-1} \right)^x, & f) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x+a}{x-a} \right)^x. \end{array}$$

**Zad 3.** Obliczyć granice jednostronne funkcji  $f(x)$  w punkcie  $x_0$ :

$$\begin{array}{ll} a) f(x) = \frac{1}{x-3}, & x_0 = 3, \\ b) f(x) = \frac{1}{3-x}, & x_0 = 3, \\ c) f(x) = \frac{1}{(3-x)^2}, & x_0 = 3, \\ d) f(x) = \frac{1}{(3-x)^3}, & x_0 = 3, \\ e) f(x) = 2^{\frac{1}{x-1}}, & x_0 = 1, \\ f) f(x) = 2^{\frac{1}{1-x}}, & x_0 = 1, \\ g) f(x) = \frac{x-2}{x^2-4}, & x_0 = -2, \\ h) f(x) = \frac{3}{9-x^2}, & x_0 = -3, \\ i) f(x) = e^{\frac{-2}{x-3}}, & x_0 = 3, \\ j) f(x) = \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}, & x_0 = 0. \end{array}$$

**Zad 4.** Na podstawie definicji Cauchy'ego wykazać ciągłość funkcji:

$$a) f(x) = 3x + 5, \quad b) f(x) = -2x + 1, \quad c) f(x) = 7x, \quad d) f(x) = \sin x.$$

**Zad 5.** Zbadać ciągłość i sporządzić wykresy następujących funkcji

$$\begin{array}{llll} a) f(x) = [x], & b) f(x) = x - [x], & c) f(x) = \operatorname{sgn} x, & d) f(x) = |\operatorname{sgn} x|, \\ e) f(x) = \operatorname{sgn}(\sin x), & f) f(x) = e^{\frac{-1}{x^2}} \text{ dla } x \neq 0 \text{ i } f(0) = 0. & & \end{array}$$

**Zad 6.** Wyznaczyć punkty nieciągłości funkcji (jeżeli istnieją) oraz sporządzić wykresy funkcji:

$$a) f(x) = \begin{cases} x + 2, & \text{gdy } x \geq 0, \\ 2x + 1, & \text{gdy } x < 0, \end{cases}$$

$$b) f(x) = \begin{cases} 1 + x^2, & \text{gdy } x \geq 0, \\ -x^2 + 1, & \text{gdy } x < 0, \end{cases}$$

$$c) f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{gdy } x \in (1, +\infty), \\ x, & \text{gdy } x \in (-\infty, 1], \end{cases}$$

$$d) f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{gdy } x \geq 0, \\ x, & \text{gdy } x < 0, \end{cases}$$

$$e) f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & \text{gdy } x \in (-\infty, 0), \\ (x - 1)^2, & \text{gdy } x \in [0, 2], \\ 4 - x, & \text{gdy } x \in (2, +\infty), \end{cases}$$

$$f) f(x) = \begin{cases} 2^x, & \text{gdy } -1 \leq x \leq 0, \\ -x + 1, & \text{gdy } 0 < x \leq 1, \\ \log x, & \text{gdy } 1 < x \leq 2, \end{cases}$$

$$g) f(x) = \begin{cases} \operatorname{sgn} x, & \text{gdy } x \in (-\infty, 0), \\ -1, & \text{gdy } x = 0, \\ x^2 - 1, & \text{gdy } x \in (0, +\infty), \end{cases}$$

$$h) f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x-1}, & \text{gdy } x \in (-\infty, -1), \\ x^2 + 2x + 2, & \text{gdy } x \in [-1, +\infty), \end{cases}$$

$$i) f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} x, & \text{gdy } x \geq 0, \\ -x^3, & \text{gdy } x < 0, \end{cases}$$

$$j) f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} x, & \text{gdy } x \leq 0, \\ e^x, & \text{gdy } x > 0, \end{cases}$$

$$k) f(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{x^2-5x+6}, & \text{gdy } x \in \mathbf{R} \setminus \{2, 3\}, \\ 1, & \text{gdy } x = 2, \\ -1, & \text{gdy } x = 3, \end{cases}$$

$$l) f(x) = \begin{cases} -x^2 - 4x - 4, & \text{gdy } x < 0, \\ 0, & \text{gdy } x = 0, \\ 2x - 4, & \text{gdy } x > 0. \end{cases}$$

**Zad 7.** Funkcja  $f(x) = \frac{x^3-1}{x-1}$  nie jest określona przy  $x = 1$ . Jaka powinna być wartość  $f(1)$ , żeby uzupełniona o tę wartość funkcja była ciągła w punkcie  $x = 1$ ?

**Zad 8.** Dla jakiej wartości  $a \in \mathbf{R}$ , funkcja  $f$  jest ciągła w zbiorze liczb rzeczywistych:

$$a) f(x) = \begin{cases} (x + a)^2, & \text{gdy } x \in (-\infty, 0], \\ -x + 1, & \text{gdy } x \in (0, +\infty), \end{cases}$$

$$b) f(x) = \begin{cases} \ln x, & \text{gdy } x \in [1, +\infty), \\ 2(x - a), & \text{gdy } x \in (-\infty, 1), \end{cases}$$

$$c) f(x) = \begin{cases} e^x + a, & \text{gdy } x \in (0, +\infty), \\ -x^2 - x, & \text{gdy } x \in (-\infty, 0], \end{cases}$$

$$d) f(x) = \begin{cases} 5^{1-x}, & \text{gdy } x \leq 0, \\ a, & \text{gdy } x > 0, \end{cases}$$

$$e) f(x) = \begin{cases} \frac{a^2 \operatorname{arctg} 2x}{6x}, & \text{gdy } x \neq 0, \\ 3, & \text{gdy } x = 0, \end{cases}$$

$$f) f(x) = \begin{cases} \frac{a \sin x}{x - \pi}, & \text{gdy } x \neq \pi, \\ x, & \text{gdy } x = \pi. \end{cases}$$